Оренбургская областная олимпиада школьников 5-8 классов

5 класс математика

Задача 5.1. В некотором месяце некоторого года ровно 5 пятниц. При этом первый и последний день этого месяца — не пятницы. Каким днём недели является 12-е число месяца?

Ответ: понедельник.

Решение. Рассмотрим все возможные варианты, каким днём недели могло быть 1-е чис-ло месяца.

Предположим, что первое число этого месяца — понедельник. Тогда пятницы — 5-е, 12-е, 19-е, 26-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — вторник. Тогда пятницы — 4-е, 11-е, 18-е, 25-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — среда. Тогда пятницы — 3-е, 10-е, 17-е, 24-е и 31-е числа. Их пять, но пятница — последний день месяца. Нам снова не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — четверг. Тогда пятницы — 2-е, 9-е, 16-е, 23-е и 30-е числа. Подходит, если в месяце 31 день. И в этом случае получается, что 12-е число — понедельник.

Первым числом пятница быть не может.

Предположим, что первое число этого месяца — суббота. Тогда пятницы — 7-е, 14-е, 21-е, 28-е числа. Их только четыре — нам не подходит.

Предположим, что первое число этого месяца — воскресенье. Тогда пятницы — 6-е, 13-е, 20-е, 27-е. Их только четыре — нам не подходит.

Задача 5.2. За круглый стол рассадили несколько человек так, что между соседними людь-ми расстояния одинаковые. Одному из них дали табличку с номером 1 и дальше по ча-совой стрелке раздали всем таблички с номерами 2, 3 и т. д.

Человек с табличкой с номером 31 заметил, что от него до человека с табличкой с номером 7 такое же расстояние, как и до человека с табличкой с номером 14. Сколько всего людей сели за стол?

Ответ: 41.

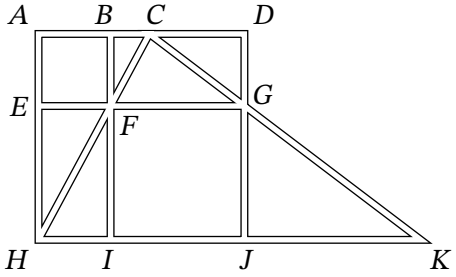
Решение. Чтобы такая ситуация была возможна, людей от 31-го до 14-го нужно считать по кругу в сторону уменьшения номеров, а от 31-го до 7-го — по кругу в сторону увеличения номеров.

Между 31-м и 14-м сидит 16 человек. Значит, между 31-м и 7-м тоже 16 человек. Среди них 6 с номерами от 1 до 6, тогда оставшиеся $16 - 6 = 10$ человек — это люди с номерами от 32-го. Самый большой номер получается 41. □

Задача 5.3. На рисунке изображён план системы дорог некоторого города. В этом городе 8 прямых улиц, а 11 перекрёстков названы латинскими буквами $A, B, C, \ldots, J, K$.

На некоторые три перекрёстка надо поставить по полицейскому так, чтобы на каждой из 8 улиц стоял хотя бы один полицейский. На какие именно три перекрёстка надо поставить полицейских? Достаточно указать хотя бы один подходящий вариант расположения.

Все улицы направлены вдоль прямых линий.
Горизонтальные улицы: $A{-}B{-}C{-}D$, $E{-}F{-}G$, $H{-}I{-}J{-}K$.
Вертикальные улицы: $A{-}E{-}H$, $B{-}F{-}I$, $D{-}G{-}J$.
Наклонные улицы: $H{-}F{-}C$, $C{-}G{-}K$.



Ответ: B, G, H.

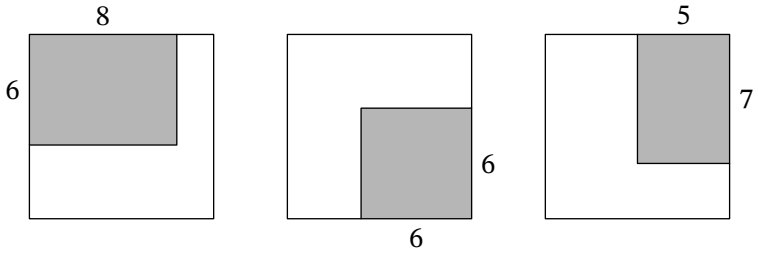
Решение. Подойдёт вариант, если поставить полицейских на перекрёстках B, G, H. Можно показать, что это единственный возможный вариант.

Поскольку вертикальных улиц всего три, и на каждой из них должно быть по полицейскому, то на перекрёстках C и K полицейских точно нет. Поэтому на перекрёстке G точно должен быть полицейский. Тогда на улице $E{-}F{-}G$ полицейских больше нет (поскольку на улицах $A{-}B{-}C{-}D$ и $H{-}I{-}J{-}K$ есть хотя бы по одному полицейскому). На улице $C{-}F{-}H$ должен быть полицейский, и его можно поставить только на перекрёстке H. Незакрытой остаются улицы $A{-}B{-}C{-}D$ и $B{-}F{-}I$, поэтому третьего полицейского нужно поставить на перекрёстке B. □

Задача 5.4. Директор школы, завхоз и родительский комитет, не договорившись друг с другом, купили по ковру для школьного актового зала размером 10×10. Подумав, что же делать, они решили положить все три ковра так, как показано на картинке: первый ковёр

6×8 — в один угол, второй ковёр 6×6 — в противоположный угол и третий ковёр 5×7 — в один из оставшихся углов (все размеры указаны в метрах).

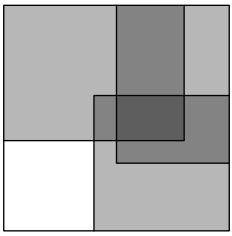
Найдите площадь части зала, накрытой коврами в три слоя (ответ дайте в квадратных метрах).



Ответ: 6.

Решение. Все размеры будем считать в метрах, а площадь — в квадратных метрах.

Посмотрим на перекрытие второго и третьего ковров. Это будет прямоугольник 5×3 (5 по горизонтали, 3 по вертикали), прилегающий к правой стороне квадратной комнаты, 4 — расстояние от верхней стороны, 3 — от нижней.



С первым ковром этот прямоугольник пересекается по горизонтали между 5-м и 8-м метрами от левой стороны квадратной комнаты, по вертикали — между 4-м и 6-м метрами от верхней стороны. В итоге получается прямоугольник 2×3, площадь которого равна 6. □

Задача 5.5. На кружки по математике записалось несколько школьников. Их хотят распределить по группам равномерно — таким образом, чтобы количество учеников в любых двух группах отличалось не более чем на 1.

В результате такого равномерного деления получилось 6 групп, среди которых ровно 4 группы по 13 учеников. Сколько всего могло быть школьников? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 76 или 80.

Решение. Так как количество учеников в группах отличается не более, чем на 1, то в оставшихся двух группах может быть по 12 или по 14 учеников (ясно, что групп из 12 и 14 уче-

ников одновременно быть не может). Значит, общее количество учеников может быть равно $13 \cdot 4 + 12 \cdot 2 = 76$ или $13 \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 80$. □

Задача 5.6. Несколько камней разложены в 5 кучек. Известно, что

- в пятой кучке камней в шесть раз больше, чем в третьей;
- во второй кучке камней вдвое больше, чем в третьей и пятой вместе взятых;
- в первой кучке камней втрое меньше, чем в пятой, и на 10 меньше, чем в четвёртой;
- в четвёртой кучке камней в два раза меньше, чем во второй.

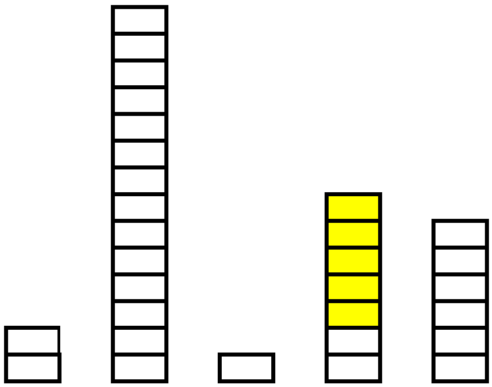
Сколько всего суммарно камней в этих пяти кучках?

Ответ: 60.

Решение. Обозначим количество камней в третьей кучке в виде прямоугольника. Тогда, так как в пятой кучке камней в 6 раз больше, то можно представить это в виде 6 прямоугольников. Во второй кучке количество камней вдвое больше, чем в третьей и пятой вместе, то есть $(1 + 6) \cdot 2 = 14$ прямоугольников. В первой втрое меньше, чем в пятой, то есть $6 : 3 = 2$ прямоугольника. В четвёртой в два раза меньше, чем во второй, то есть $14 : 2 = 7$ прямоугольников.

При этом также известно, что в первой кучке камней на 10 меньше, чем в четвёртой. Тогда 5 прямоугольников соответствуют 10 камням. Значит, 1 прямоугольник = 2 камня.

Всего $2 + 14 + 1 + 7 + 6 = 30$ прямоугольников. Это $30 \cdot 2 = 60$ камней.



□

Задача 5.7. После чемпионата мира по хоккею три журналиста написали статью о сборной Германии — каждый для своей газеты.

- Первый написал: «Сборная Германии за весь чемпионат забила больше 10, но меньше 17 шайб».

- Второй: «Сборная Германии забила больше 11, но меньше 18 шайб за весь чемпионат».
- Третий: «Сборная Германии забила нечётное количество шайб за весь чемпионат».

В итоге оказалось, что правы были только два журналиста. Сколько шайб могла забить сборная Германии на чемпионате? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 11, 12, 14, 16 или 17.

Решение. Рассмотрим все возможные варианты.

Если шайб забито не больше 10, то для нечётного количества шайб будет верно одно утверждение, а для чётного — ноль. Не подходит.

Если забито 11 шайб, то верны ровно два утверждения. Подходит.

Если шайб забито от 12 до 16, то для нечётного количества шайб верны все три утверждения, а для чётного — два. Подходят только чётные значения: 12, 14, 16.

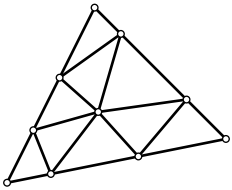
Если забито 17 шайб, то верны ровно два утверждения. Подходит.

Если шайб забито не меньше 18, то для нечётного количества шайб верно одно утверждение, а для чётного — ноль. Не подходит.

Итак, нам подходят пять значений: 11, 12, 14, 16, 17. □

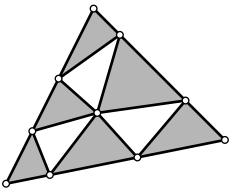
Задача 5.8. Внутри большого треугольника периметра 120 провели несколько отрезков, которые разделили его на девять меньших треугольников, как показано на рисунке. Оказалось, что периметры всех девяти маленьких треугольников равны между собой. Чему они могут быть равны? Укажите все возможные варианты.

Периметр фигуры — сумма длин всех её сторон.



Ответ: 40.

Решение. Сложим периметры шести маленьких треугольников, отмеченных серым на следующем рисунке:



Из полученного значения вычтем периметры остальных трёх маленьких белых треугольников. Поскольку периметры маленьких треугольников равны, то, с одной стороны, получится утроенный периметр маленького треугольника. С другой стороны, в такой сумме будут только отрезки, составляющие периметр большого треугольника, равный 120. Значит, периметр маленького треугольника равен $120 : 3 = 40$. □

□